Lineare Algebra: Vektoren und Matrizen

Die mathematische Teildisziplin der *Linearen Algebra* beschäftigt sich mit Vektoren, Matrizen, Linearen Gleichungssystemen und Linearen Abbildungen, um hier nur die zentralen Gebiete zu nennen. Wir beginnen im Rahmen unserer Vorlesung mit einigen der zahlreichen Definitionen rund um die Vektoren und Matrizen.

Betrachten wir zum Einstieg die Definitionen und einige einfache Beispiele für Matrizen und Vektoren.

Definition: Ein (*reellwertiger*) ***Vektor*** (oder *Spaltenvektor*) ist eine Anordnung von endlich vielen reellen Zahlen in einer Spalte. Schreibweise:

$$\vec{v} := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Der Vektor hat dann die *Dimension n*.

Beispiel: Bekannt sind vermutlich Lage- oder Ortsvektoren im zwei- bzw. dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$. Ein konkreter Vektor wäre dann beispielsweise $\vec{v} := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ im dreidimensionalen Raum. Startet man im Ursprung (0,0,0) des Koordinatensystems, so gelangt man durch diesen Vektor zum Punkt (2,1,1).

Bemerkung: Für Vektoren wie die hier angesprochenen im $\mathbb{R}^n$ können zwei Rechenoperationen ganz naheliegend definiert werden:

1. Zwei „baugleiche" Vektoren (also $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n$) können addiert (und subtrahiert) werden, indem man komponentenweise addiert (bzw. subtrahiert) („*Vektoraddition, -subtraktion*").
2. Ein Vektor kann mit einer reellen Zahl, einem sog. *Skalar*, multipliziert werden: für $\alpha \in \mathbb{R}$ wird definiert $\alpha \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha \cdot v_1 \\ \dots \\ \alpha \cdot v_n \end{pmatrix}$ („*Skalarmultiplikation*").

Definition: Die Menge $\mathbb{R}^n$ wird gemeinsam mit den beiden Rechenoperationen Vektoraddition und Skalarmultiplikation als sog. *Vektorraum* bezeichnet.

Bemerkung: Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ besitzt die (sog.) *Dimension n*. In ihm gibt es *n* voneinander unabhängige Richtungen, also Dimensionen[1].

Vektoren sind – formal betrachtet – Zahlen-Schemata mit mehreren Zeilen und einer Spalte (bzw. im Falle eines Zeilenvektors entsprechend symmetrisch einer Zeile und mehreren Spalten). Die nächste Verallgemeinerung liegt auf der Hand.

Definition: Ein rechteckiges Zahlenschema mit m Zeilen und n Spalten der Form

$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & a_{i,j} & \dots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

mit $a_{i,j} \in \mathbb{R} \quad \forall 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ heißt (*m,n*)-***Matrix*** oder $m \times n$ -*Matrix*. m sowie die ersten Indizies geben hierbei die Zeilen, n und die zweiten Indizes die Spalten an.

Beispiel: Ein Unternehmen produziere zwei Waren W_1 und W_2. Hier werden verschiedene Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 in unterschiedlichen Mengen verwendet. Diese Mengen lassen sich dann recht übersichtlich in der sogenannten „Technologie-Matrix“ darstellen.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Zu lesen ist dies beispielsweise so: für eine Einheit W_1 sind 2 Stück (bzw. Mengeneinheiten) R_1 und 1 Stück R_2 sowie 3 Stück R_3 zu verwenden.

Bemerkung: Ein (Spalten-)Vektor im $\mathbb{R}^m$ ist, so gesehen, nichts anderes als eine (*m,1*)-Matrix, also eine Matrix mit *m* Zeilen und einer Spalte. Analog ist eine (*1,n*)-Matrix ein sogenannter Zeilenvektor der Dimension *n*.

Entsprechend besteht eine (*m,n*)-Matrix aus *m* Zeilen- bzw. *n* Spaltenvektoren.

Definitionen und Bemerkungen:

1. Die Matrizen mit lauter Nullen werden *Nullmatrizen* genannt; die Vektoren mit lauter Nullen heißen entsprechend *Nullvektoren*. Wegen der unterschiedlichen Dimensionen bzw. Spalten- und Zeilenanzahlen gibt es unendlich viele Nullmatrizen und unendlich viele Nullvektoren.
2. Eine (*n,n*)-Matrix heißt *quadratische Matrix*; diese hat gleichviele Zeilen wie Spalten.
3. Bei einer quadratischen (*n,n*)-Matrix bilden die Elemente $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ die sogenannte *Diagonale*.

1 Evtl. wird uns im Rahmen unserer Veranstaltung die Zeit nicht für eine umfassendere Betrachtung reichen; es gibt in der Mathematik noch viele andere Typen von Vektorräumen, in denen dann ein entsprechender Dimensionsbegriff definiert und betrachtet wird.

4. Eine quadratische Matrix, bei der nur Elemente auf der Diagonale ungleich 0 sind, heißt *Diagonalmatrix.* Diese sieht wie folgt aus.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & a_{i,i} & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

5. Eine spezielle Diagonalmatrix ist die *Einheitsmatrix* („*identity*") I oder E, bei der ausschließlich die Zahl 1 auf der Diagonalen steht.

$$I := E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkungen:

1. Analog zur Skalarmultiplikation von Vektoren kann auch bei einer Matrix das skalare Vielfache gebildet werden; hier wird ebenfalls das Skalar α in jede einzelne Komponente hineingezogen.
2. Ebenfalls ganz analog werden Summe und Differenz (Addition und Subtraktion) von Matrizen (gleicher „Bauart") definiert. Die Summe zweier (*m,n*)-Matrizen ist die (*m,n*)-Matrix, die aus den Summen der korrespondierenden Komponenten der Ausgangsmatrizen besteht.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

Greifen wir das obige Beispiel mit den Produkten und den Rohstoffen auf. Die Matrix, die die Zusammenhänge mittels der Rohstoffmengen ausdrückte, war die folgende.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Produziert das Unternehmen nun beispielsweise 100 Stück des Produktes W_1 und 300 Stück des Produktes W_2, so ergibt sich durch die folgenden Gleichungen, wieviele Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 benötigt werden.

Bedarf R_1: $2 \cdot 100 + 3 \cdot 300 = 1100$

Bedarf R_2: $1 \cdot 100 + 2 \cdot 300 = 700$

Bedarf R_3: $3 \cdot 100 + 4 \cdot 300 = 1500$

Die Produktionsmenge (in Stück von W_1 und W_2) lässt sich als Vektor $\vec{u}$ mit zwei Einträgen darstellen: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \end{pmatrix}$.

Das Ergebnis der drei Bedarfe ist ebenfalls wieder ein Vektor, nennen wir diesen $\vec{v}$, so gilt:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1100 \\ 700 \\ 1500 \end{pmatrix} \quad .$$

Schematisch können wir dies mit der o.g. Matrix sowie den beiden Vektoren wie folgt notieren.

$$\begin{pmatrix} 1100 \\ 700 \\ 1500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

bzw. in Variablenform

$$\vec{v} = A \cdot \vec{u}$$

Damit wird implizit eine Multiplikation einer (geeigneten) Matrix mit einem (geeigneten) Vektor suggeriert, die nachstehend allgemeingültig definiert werden soll.

Definition: Es sei *A* eine (*k,m*)-Matrix, also eine Matrix mit *k* Zeilen und *m* Spalten (und den Elementen $a_{i,j}$, $1 \le i \le k, 1 \le j \le m$); *B* sei eine (*m,n*)-Matrix mit den einzelnen reellen Komponenten $b_{i,j}$, $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$. (Das heißt: die Spaltenanzahl der ersten Matrix *A* ist gleich der Zeilenanzahl der zweiten Matrix *B*. Manchmal nennt man dies auch „*A* ist *konform* zu *B*".)

Dann wird als *Multiplikation* (bzw. das *Produkt*) $A \cdot B$ der beiden Matrizen *A* und *B* die folgende (*k,n*)-Matrix definiert:

$$A \cdot B := \begin{vmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & \dots & c_{2,n} \\ \dots & c_{i,j} & \dots \\ c_{k,1} & \dots & c_{k,n} \end{vmatrix}$$

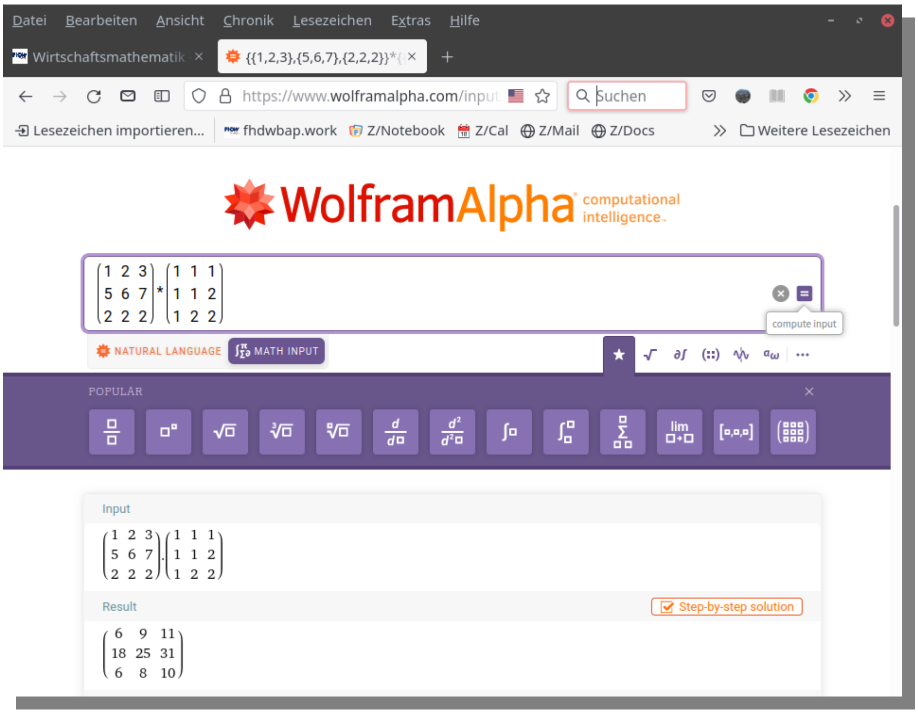
mit

$$c_{i,j} := \sum_{l=1}^{m} a_{i,l} \cdot b_{l,j}$$

Bemerkungen:

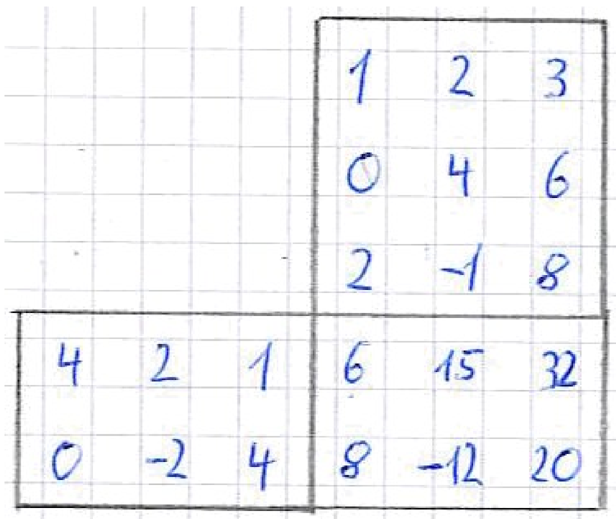
1. Die umgangssprachliche Formulierung bei der Matrizenmultiplikation lautet „*Zeile mal Spalte*", denn die o.g. Summationsformel addiert die Produkte des *l*-ten Elementes der *i*-ten Zeile von *A* mit dem *l*-ten Element der *j*-ten Spalte von *B*, auf diese Weise erhält man das Element c_{ij} der Produktmatrix – also in der *i*-ten Zeile und *j*-ten Spalte.
2. Ist die rechte Matrix B „nur" ein Spaltenvektor, so erhalten wir die Formel für „Matrix mal Vektor", wobei die Matrix wiederum genau so viele Spalten besitzen muss wie der Vektor Zeilen.

Eine Anmerkung: Die Matrizen-Multiplikation kann natürlich mit zahlreichen Tools durchgeführt werden. Stellvertretend sei an dieser Stelle das browserbasierte WolframAlpha erwähnt; hier können in einer mathematisch-formelhaften sowie in einer visuellen Form Matrizen eingegeben und beispielsweise deren Produkt berechnet werden.



Eine zweite Anmerkung: Das *Falk-Schema* zur Multiplikation von Matrizen

Eine kleine Arbeitserleichterung in diesem Zusammenhang ist das sogenannte Schema von Falk. Hierbei schreibt man die beiden zu multiplizierenden Matrizen wie hier gezeigt in ein rechteckiges Schema, so dass in dem Bereich rechts unten bequem das jeweilige Element eingetragen werden kann[2].



Hier sind die Matrizen A und B wie folgt definiert.

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

Rechts unten ist das Produkt AB zu sehen.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 32 \\ 8 & -12 & 20 \end{pmatrix}$$

Kleine Übung zur Einstimmung: Bestimmen Sie bitte zu den u.g. Matrizen sämtliche paarweisen Multiplikationen (also $A \cdot A, A \cdot B, A \cdot C, \ldots, C \cdot C$), <u>sofern</u> diese definiert sind.

2 Quelle der hier gezeigten Graphik: http://www.frustfrei-lernen.de/mathematik/matrizen-multiplizieren.html, Abruf: 24.10.2021.

$$A:=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\quad , \quad B:=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 1\end{pmatrix}\quad , \quad C:=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Feststellung und Aufgabe: Beachten Sie bitte, dass die Multiplikation von Matrizen nicht kommutativ ist, d.h. es gilt für Matrizen A und B generell <u>nicht</u> $A\cdot B = B\cdot A$! Dies liegt zum einen daran, dass zu gegebenen Matrizen A und B die beiden Reihenfolgen nur bei quadratischen Matrizen gleichzeitig möglich sind (- wieso? -), zum anderen aber ist selbst bei quadratischen Matrizen im allgemeinen die Multiplikation nicht kommutativ!
Überprüfen Sie diese Aussage bitte anhand selbst gewählter (geeigneter) (*3,3*)-Matrizen!